

Comprehensive investigation of analytical calculation of back-water profile using Mathematica model in comparison with numerical analyses

Kamran Mohammadi ^{1✉} 

1. Corresponding Author, Water Engineering Department, Campus of agriculture and natural resources, Razi University, Kermanshah, Iran. E-mail: k_mohammadi@razi.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:

Received
2026-07-15
Received in revised form
2026-08-29
Accepted
2026-09-13
Available online
2026-10-01

Keywords:

Backwater profile,
Wolfram Mathematica,
Numerical and analytical
methods,
Sensitivity analysis,
Stability and convergence
analysis

ABSTRACT

This study evaluates and compares the performance of three step-by-step numerical schemes and three integral analytical approaches in simulating the backwater profile of subcritical flow in open channels. In the numerical category, the fourth-order Runge–Kutta, Kutta–Merson, and Trapezoidal methods were employed, while the analytical category comprised the Bresse, Bakhmeteff, and Bakhmeteff–Chow formulations. The analytical solutions of complicated integrals were coded and executed in *Wolfram Mathematica*, whereas the numerical simulations were implemented in *Visual Basic*. A trapezoidal-section concrete channel within the Dez Dam irrigation network was selected as the case study. The evaluation was conducted using statistical indices such as Relative Error, Relative Root Mean Square Error (Rel.RMSE), and Relative Bias (Rel.Bias), alongside computation time and numerical stability criteria. The results showed that numerical methods, particularly Kutta–Merson, achieved superior accuracy (Rel.RMSE < 0.5% and Rel.Bias < 0.3%) with very short computation times (4.1–6.1 s). Analytical approaches, while maintaining acceptable accuracy (Rel.RMSE < 1%), required longer runtimes (21.3–24.1 s) due to multiple quadrature iterations and exhibited sensitivity to integration tolerance. Quantitative sensitivity analysis revealed that a 20% reduction in bed slope increased backwater length by over 30%, while a 20% increase in Manning’s coefficient nearly doubled the prediction error; variations in channel width and discharge produced comparatively smaller effects. In terms of stability, all step-by-step numerical schemes operated without divergence or oscillations in all scenarios and demonstrated uniform convergence with reduced step size, whereas analytical methods required strict control of integration parameters to avoid loss of accuracy. Overall, the findings highlight that adaptive numerical methods are highly effective for design and operational applications under practical conditions, while analytical methods serve as complementary tools for baseline studies and comparative analyses.

Cite this article: Mohammadi, Kamran. (2026). Comprehensive investigation of analytical calculation of back-water profile using Mathematica model in comparison with numerical analyses. *Advanced Modeling in Civil Engineering*, 3(3),103-123. DOI: 10.22126/amcen.2026.13186.1051



© The Author(s).
DOI: 10.22126/amcen.2026.13186.1051

Publisher: Razi University

Introduction

Accurate prediction of backwater profiles in subcritical open-channel flows is of fundamental importance for hydraulic structure design, flood management, and operational planning. Both analytical and numerical approaches have been widely applied in this context, yet their relative performance, computational efficiency, and robustness under practical conditions require systematic evaluation. This study investigates and compares three step-by-step numerical methods—fourth-order Runge–Kutta, Kutta–Merson, and Trapezoidal—with three integral analytical approaches—Bresse, Bakhmeteff, and Bakhmeteff–Chow—in simulating backwater curves. The analytical formulations were implemented in *Wolfram Mathematica* using numerical quadrature, while the numerical schemes were coded in *Visual Basic*. The case study is based on a trapezoidal-section concrete channel within the Dez Dam irrigation network, where accurate backwater prediction is critical for operational safety and water delivery efficiency.

Method

The analysis employed a combination of numerical integration for the analytical solutions and explicit/implicit marching schemes for the numerical methods. Statistical performance indicators included Relative Root Mean Square Error (Rel.RMSE), Relative Bias (Rel.Bias), and relative error compared to a high-resolution reference solution. Computational performance was evaluated through execution time measurements in both *Mathematica* and *Visual Basic*. Sensitivity analysis was carried out for key hydraulic parameters—bed slope, Manning’s coefficient, channel width, and discharge—by applying $\pm 20\%$ variations and assessing their impact on backwater length and prediction accuracy. Stability and convergence behavior were examined by varying step sizes (numerical methods) and integration tolerances (analytical methods).

Results

Numerical methods, particularly Kutta–Merson, demonstrated superior accuracy with Rel.RMSE below 0.5% and Rel.Bias below 0.3%, while maintaining very short computation times between 4.1–6.1 ms. Analytical methods, despite delivering acceptable accuracy (Rel.RMSE < 1%), required significantly longer runtimes (21.3–24.1 ms) due to multiple quadrature iterations and showed greater sensitivity to integration tolerance. Sensitivity analysis revealed that a 20% reduction in bed slope increased backwater length by over 30%, while a 20% increase in Manning’s coefficient nearly doubled the prediction error. Variations in discharge and channel width had smaller effects on both profile length and statistical errors. In terms of stability, all step-by-step numerical methods operated without oscillations or divergence across all test scenarios and exhibited uniform convergence with smaller step sizes. Analytical methods required stricter tolerance settings to prevent accuracy degradation, highlighting their dependence on quadrature precision.

Conclusions

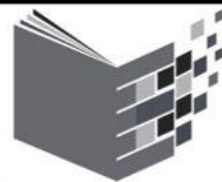
The findings indicate that adaptive numerical methods—particularly Kutta–Merson—offer the most favorable balance between accuracy, computational speed, and stability, making them well-suited for real-time applications and operational decision-making in hydraulic engineering. Analytical methods, implemented via *Mathematica*, provide a valuable reference for baseline studies, calibration, and verification of numerical models, but their higher computational demand and sensitivity to integration tolerance limit their practicality in time-critical simulations. Overall, the complementary use of adaptive numerical schemes for routine operations and analytical methods for validation purposes can yield a robust and efficient modeling framework for backwater prediction in subcritical open-channel flows.

Author Contributions

All authors participated in writing and revising the article.

Conflict of Interest

Authors declared no conflict of interest.



بررسی تفصیلی تکنیک‌های تحلیلی محاسبه پروفیل پس‌زدگی آب با استفاده از مدل کدنویسی Mathematica و مقایسه آن با تحلیل‌های عددی

کامران محمدی^۱

۱. نویسنده مسئول، گروه مهندسی آب، پردیس کشاورزی و منابع طبیعی، دانشگاه رازی، کرمانشاه، ایران. رایانامه: k_mohammadi@razi.ac.ir

اطلاعات مقاله	چکیده
نوع مقاله: مقاله پژوهشی	
تاریخ دریافت: ۱۴۰۵/۰۴/۲۴	
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۵/۰۶/۰۷	
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۶/۲۲	
تاریخ انتشار: ۱۴۰۵/۰۷/۰۹	
کلیدواژه‌ها: پروفیل پس‌زدگی آب، Wolfram Mathematica، روش‌های حل عددی و تحلیلی، تحلیل حساسیت، تحلیل پایداری و همگرایی	این پژوهش به ارزیابی و مقایسه کارایی سه روش عددی گام‌به‌گام و سه روش تحلیلی انتگرالی در شبیه‌سازی پروفیل پس‌زدگی آب در جریان زیر بحرانی در کانال‌های باز پرداخته است. در بخش عددی، روش‌های رانگ-کوتا مرتبه چهار، کوتا-مرسون و دوزنقه‌ای، و در بخش تحلیلی، روش‌های برس، باخمتف و باخمتف-چاو به کار گرفته شدند. کدنویسی حل تحلیلی و مستقیم انتگرال‌های پیچیده با استفاده از نرم‌افزار Wolfram Mathematica و حل عددی در محیط Visual Basic انجام شد. کانالی بتنی با مقطع دوزنقه‌ای در شبکه سد دز مورد بررسی قرار گرفت. ارزیابی‌ها بر اساس شاخص‌های آماری نظیر خطای نسبی، ریشه میانگین مربعات خطای نسبی (Rel.RMSE) و بایاس نسبی (Rel.Bias)، زمان محاسبات و پایداری عددی صورت گرفت. نتایج نشان داد روش‌های عددی، به‌ویژه کوتا-مرسون، در دستیابی به دقت بالا (Rel.RMSE کمتر از ۰/۵٪ و Rel.Bias کمتر از ۰/۳٪) و زمان محاسباتی بسیار کوتاه (۴/۱ تا ۶/۱ ثانیه) برتری دارند. روش‌های تحلیلی با وجود دقت قابل قبول (Rel.RMSE کمتر از ۰/۱٪) به دلیل نیاز به تکرارهای متعدد، زمان محاسبات بیشتری داشتند (۲۱/۳ تا ۲۴/۱ ثانیه) و به تلورانس انتگرال‌گیری حساس بودند. تحلیل حساسیت کمی بیانگر آن بود که کاهش ۲۰٪ در شیب بستر موجب افزایش طول پروفیل تا بیش از ۳۰٪ و افزایش ۲۰٪ در ضریب زبری باعث کاهش دقت پیش‌بینی تا دو برابر شد، در حالی که تغییر عرض کانال و دبی اثرات کمتری ایجاد کرد. از نظر پایداری، روش‌های عددی گام‌به‌گام در تمامی سناریوها بدون واگرایی و نوسان عمل کردند و با کاهش گام، همگرایی یکنواختی داشتند، در حالی که در روش‌های تحلیلی، کنترل دقیق پارامترهای انتگرال‌گیری برای جلوگیری از افت دقت ضروری بود. یافته‌ها نشان می‌دهد که روش‌های عددی تطبیقی برای طراحی و بهره‌برداری در شرایط عملی، و روش‌های تحلیلی به‌عنوان مطالعات پایه و مقایسه‌ای، مکمل یکدیگر هستند.

استناد: محمدی، کامران. (۱۴۰۵). بررسی تفصیلی تکنیک‌های تحلیلی محاسبه پروفیل پس‌زدگی آب با استفاده از مدل کدنویسی Mathematica و مقایسه آن با تحلیل‌های عددی. مجله مدل‌سازی پیشرفته در مهندسی عمران، ۳(۳)، ۱۰۳-۱۲۳.

DOI: 10.22126/amcen.2026.13186.1051



© نویسندگان.

ناشر: دانشگاه رازی.

۱. مقدمه

پروفیل برگشت سطح آب^۱ از پدیده‌های مهم و تأثیرگذار در تحلیل جریان‌های روباز به شمار می‌آید که در طراحی، مدیریت و بهره‌برداری از سازه‌های هیدرولیکی، نقش کلیدی ایفا می‌کند. این پروفیل زمانی ایجاد می‌شود که یک مانع یا تغییر در بستر کانال باعث افزایش موضعی سطح آب گردد و این افزایش به صورت تدریجی در خلاف جهت جریان منتشر شود. شناسایی دقیق این پدیده برای ارزیابی خطرات ناشی از سیلاب، کنترل رسوب، و طراحی مناسب سرریزها و پایاب‌ها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است [۱].

برآورد دقیق پروفیل برگشت آب همواره یکی از چالش‌های مطرح در مهندسی هیدرولیک بوده است. روش‌های تحلیلی و عددی متعددی برای محاسبه آن توسعه یافته‌اند که هر یک با مزایا و محدودیت‌هایی همراه است. در میان روش‌های تحلیلی، مدل‌های مبتنی بر انتگرال‌گیری مستقیم مانند روش‌های پرس^۲، باخمتف^۳ و باخمتف-چاو^۴ از جمله ابزارهای کلاسیک محسوب می‌شوند که با استفاده از فرم ساده‌شده معادله انرژی، طول پروفیل را با دقت قابل قبول برای شرایط ایده‌آل محاسبه می‌نمایند. این روش‌ها، با وجود سادگی مفهومی، به دلیل نیاز به انتگرال‌گیری عددی، در شرایط پیچیده کانال یا جریان با دقت محدودی عمل می‌کنند [۲].

در مقابل، روش‌های عددی گام‌به‌گام نظیر روش رانگ-کوتای مرتبه چهار^۵، کوتا-مرسون^۶ و روش دوزنقه‌ای^۷ با اتکا بر رویکردهای تفاضلی، امکان حل دقیق‌تر معادله انرژی را در شرایط متغیر و جریان‌های غیرخطی فراهم می‌سازند. این روش‌ها به ویژه در مدل‌سازی جریان‌های دارای رسوبات چسبنده و ویژگی‌های هندسی غیر یکنواخت، عملکرد بهتری از خود نشان داده‌اند [۳و۴].

در راستای پیاده‌سازی روش‌های تحلیلی و عددی مطرح‌شده، از دو نرم‌افزار مختلف متناسب با نیازهای محاسباتی هر دسته از روش‌ها استفاده شد. برای روش‌های مبتنی بر انتگرال‌گیری مستقیم به دلیل نیاز به محاسبه دقیق انتگرال‌های پیچیده و حل معادلات غیرخطی،

نرم‌افزار Wolfram Mathematica به کار گرفته شد که قابلیت بالایی در کدنویسی و انجام محاسبات ریاضی و حل معادلات پیچیده و دقیق دارد. در مقابل، برای روش‌های عددی گام‌به‌گام که نیازمند پیاده‌سازی الگوریتم‌های تکرارشونده و کنترل روند محاسبات هستند، از زبان برنامه‌نویسی Visual Basic بهره گرفته شد. این زبان، به واسطه‌ی محیط توسعه ساده و امکان ارتباط مستقیم با کاربر از طریق فرم‌های گرافیکی، امکان پیاده‌سازی دقیق و شبیه‌سازی ساختار یافته این روش‌ها را فراهم ساخت. بهره‌گیری هم‌زمان از این دو ابزار، انعطاف‌پذیری و دقت لازم در ارزیابی جامع روش‌های محاسباتی مختلف را در این تحقیق تضمین نموده است.

در ادبیات مهندسی هیدرولیک، روش‌های مبتنی بر معادله انرژی و روش گام مرحله‌ای استاندارد به‌ویژه در نرم‌افزار HEC-RAS مورد استفاده گسترده قرار گرفته‌اند [۲]. پژوهش‌هایی مانند عباسپور و همکاران نشان دادند که علی‌رغم سادگی مفهومی، این روش‌ها در محیط‌های پیچیده محدودیت‌هایی دارند و روش‌های عددی مانند رانگ-کوتای مرتبه چهار دقت بالاتری ارائه می‌کنند [۳]. در سال‌های پس از ۲۰۲۰، چندین مطالعه به محدودیت روش‌های تحلیلی کلاسیک در شرایطی از قبیل هندسه‌های پیچیده یا جریان متغیر اشاره کرده‌اند. برای نمونه، نیبوه^۸ و همکاران با استفاده از مدل CFD برای جریان پشت توربین هیدروکینتیک تأکید کردند که روش‌های تحلیلی پاسخ‌گوی شرایط واقعی نیستند [۵]. همچنین، وسیم^۹ و همکاران نشان دادند که در دشت‌های سیلابی، مدل‌های ساده‌ای مثل ماسکینگهام-کنج^{۱۰} قادر به پیش‌بینی دقیق اثرات برگشت سطح آب نیستند، بلکه روش‌های هیدرودینامیکی دقیق‌تر ضروری است [۶].

پژوهش‌های جدیدتر به سمت بهره‌گیری از مدل‌های عددی پیشرفته حرکت کردند. به‌عنوان مثال گارسیا-فیل^{۱۱} و همکاران عملکرد مدل‌هایی مانند HO-SWM و Iber+ را در شرایط جریان متغیر ارزیابی کردند که نشان‌دهنده افزایش سرعت و دقت است [۷]. ژی^{۱۲} و همکاران نیز با شبیه‌سازی سه‌بعدی جریان در گوشه‌های منحنی کانال

⁷ trapezoidal method⁸ Niebuhr⁹ Waseem¹⁰ Muskingum-Cunge¹¹ García-Feal¹² Xie¹ Backwater Profile² Bresse method³ Bakhmeteff method⁴ Bakhmeteff-Chow method⁵ fourth-order Runge-Kutta method⁶ Kutta-Merson method

کردند که روش‌های عددی با دقت پایین‌تر از ۲٪ عملکرد برتر از روش‌های تحلیلی دارند [۱۲]. در سال ۲۰۲۵، ژو^{۱۶} و همکاران آزمایشی را انجام دادند که تأثیر پروفیل برگشت بر توزیع سرعت در یک قوس ۹۰ درجه را بررسی کرد و اهمیت مدل‌سازی دقیق اثرات بک‌واتر را برجسته کردند [۱۳]. همچنین نرم‌افزاری معرفی شد که امکان محاسبه موازی چند روش تحلیل پروفیل برگشت سطح آب را فراهم می‌کند و به‌عنوان ابزار رایگان با دقت بالا شناخته شده است [۱۴]. علاوه بر این، مطالعه‌ای دیگر به‌دقت به تحلیل جریان‌هایی پرداخته که زمینه تجربی ارزشمندی در ارتباط با روش‌های عددی فراهم می‌کند [۱۵]. جدول ۱ خصوصیات روش‌های مورد بررسی را از جنبه‌های گوناگون بررسی می‌نماید.

حاوی گابیون، تأکید کردند که برای تحلیل پروفیل‌های برگشت سطح آب در مواجهه با موانع هندسی، نیاز به مدل‌سازی سه‌بعدی دقیق داریم [۸]. ژائو^{۱۳} و همکاران نشان دادند که حضور پوشش گیاهی غوطه‌ور، ساختار جریان را تغییر داده و توزیع سرعت را دگرگون می‌کند. این مسأله بر نحوه شکل‌گیری پروفیل برگشتی تأثیرگذار است و مدل‌های عددی دقیق‌تری را می‌طلبد [۹]. همین موضوع توسط ویلسون^{۱۴} و همکاران نیز مطرح شده‌بود، اما مجدداً مورد تأکید در پژوهش‌های اخیر قرار گرفته است [۱۰].

سایر مطالعات به مدل‌سازی ثانویه و جریان‌های پیچشی در تلاقی کانال‌ها پرداخته‌اند که مقیاس سه‌بعدی لازم دارد. ویراکون^{۱۵} و همکاران نشان دادند که این نوع جریان‌ها بدون یک مدل‌سازی مناسب سه‌بعدی قابل پیش‌بینی نیستند [۱۱]. افزون بر این، زهران^{۱۶} و همکاران با تحلیل جریان در تقاطع‌های ۹۰ درجه در FLUENT، ثابت

جدول ۱. خصوصیات روش‌های عددی و تحلیل بررسی از جنبه‌های گوناگون

نوع روش	نام روش	دقت محاسباتی	پیچیدگی محاسباتی	زمان اجرا	حساسیت به پارامتر هیدرولیکی	پایداری عددی	کاربردپذیری واقعی
تحلیلی	برس	متوسط	کم	زیاد	زیاد (به‌ویژه شیب و زبری)	وابسته به تلورانس انتگرال	مطالعات پایه و آموزشی
تحلیلی	باخمتف	متوسط تا خوب	متوسط	زیاد	زیاد (به شیب بستر)	وابسته به همگرایی انتگرال	تحلیل‌های نظری و مقایسه‌ای
تحلیلی	باخمتف-چاو	خوب	متوسط	زیاد	متوسط تا زیاد	وابسته به پارامترهای عددی	مطالعات پارامتریک
عددی	دوزنقه‌ای	خوب	کم	کم	متوسط	پایدار در گام‌های کوچک	طراحی‌های ساده مهندسی
عددی	رنگ-کوتا	زیاد	متوسط	کم	متوسط	پایدار	طراحی و تحلیل مهندسی
عددی	کوتا-مرسون	بسیار زیاد	متوسط تا زیاد	بسیار کم	کم تا متوسط	بسیار پایدار (تطبیقی)	کارهای عملی و تحلیل حساسیت

¹⁶ Zahran

¹⁷ Zhou

¹³ Zhao

¹⁴ Wilson

¹⁵ Weerakoon

۲-۱-۱. نرم‌افزار Wolfram Mathematica

نرم‌افزار Mathematica یکی از قدرتمندترین ابزارهای محاسباتی برای انجام کدنویسی محاسبات در حوزه‌های ریاضی، فیزیک، مهندسی و مدل‌سازی عددی است. این نرم‌افزار دارای موتور نمادین^{۱۸} پیشرفته‌ای است که قابلیت حل معادلات جبری، معادلات دیفرانسیل، و به‌ویژه انتگرال‌گیری‌های پیچیده غیرخطی را دارد. در پروژه حاضر، از Mathematica و به کمک کدنویسی به‌منظور پیاده‌سازی سه روش تحلیلی کلاسیک یعنی برس، باخمتف و باخمتف-چاو استفاده شده است. این سه روش مبتنی بر انتگرال‌گیری مستقیم از فرم انرژی معادله جریان متغیر تدریجی هستند و نیازمند ارزیابی دقیق انتگرال‌هایی با کران‌های متغیر و تابع‌های پیچیده از سرعت و انرژی ویژه می‌باشند. Mathematica این امکان را فراهم می‌کند که انتگرال‌ها با دقت بالا و با الگوریتم‌های داخلی نظیر NIntegrate (برای انتگرال‌گیری عددی) و FindRoot (برای حل معادلات غیرخطی برای عمق بحرانی یا عمق خاص) حل شوند.

۲-۱-۲. نرم‌افزار Visual Basic (VB6)

در بخش دیگری از پژوهش، سه روش عددی گام‌به‌گام شامل رانگ-کوتای مرتبه چهارم، کوتا-مرسون و روش دوزنقه‌ای پیاده‌سازی شده‌اند. این روش‌ها مبتنی بر حل عددی معادلات دیفرانسیل جریان به‌صورت گام‌به‌گام با استفاده از روابط تفاضلی هستند و از آنجا که به‌جای انتگرال‌گیری، نیاز به محاسبات ترتیبی، حلقه‌های تکرار و کنترل مراحل اجرا دارند، در محیط Visual Basic 6.0 پیاده‌سازی شده‌اند. Visual Basic به‌عنوان یکی از محیط‌های توسعه سریع نرم‌افزار^{۱۹} قابلیت بالایی در طراحی رابط کاربر، کنترل مراحل اجرای برنامه، تعریف متغیرها و عملیات عددی ساده دارد.

مزایای استفاده از VB6 در این پروژه عبارت‌اند از:

- ✓ پیاده‌سازی ساده الگوریتم‌های عددی ترتیبی
- ✓ مدیریت مستقیم متغیرها و حلقه‌ها بدون نیاز به ماتریسی پیچیده
- ✓ خروجی‌گیری سریع و خوانا در قالب فایل‌های متنی
- ✓ ایجاد محیط گرافیکی تعاملی جهت سهولت استفاده کاربران غیرمتخصص

تحقیق حاضر در نظر دارد تا با بهره‌گیری از ترکیبی از روش‌های تحلیلی برس، باخمتف و باخمتف-چاو و روش‌های عددی گام‌به‌گام رانگ-کوتای مرتبه چهارم، کوتا-مرسون و روش دوزنقه‌ای همراه با استفاده از ابزارهای تخصصی کدنویسی Mathematica و Visual Basic، یک ارزیابی جامع، دقیق و متناسب با روندهای پژوهشی روز ارائه نماید.

نوآوری این پژوهش در انجام یک مقایسه نظام‌مند، کمی و کاربردمحور میان روش‌های تحلیلی و عددی متداول در تحلیل پروفیل برگشت سطح آب نهفته است. در این مطالعه، شش روش پرکاربرد شامل سه روش عددی گام‌به‌گام و سه روش تحلیلی انتگرالی در یک چارچوب محاسباتی یکسان مورد بررسی و ارزیابی قرار گرفته‌اند. برخلاف بسیاری از مطالعات پیشین که تمرکز اصلی آن‌ها صرفاً بر دقت محاسباتی بوده است، در این پژوهش عملکرد روش‌ها به‌صورت هم‌زمان از منظر دقت پیش‌بینی، پایداری عددی، رفتار همگرایی، هزینه محاسباتی و حساسیت نسبت به پارامترهای هیدرولیکی کلیدی مورد تحلیل قرار گرفته است. همچنین، پیاده‌سازی روش‌های تحلیلی در محیط نرم‌افزار Wolfram Mathematica و مقایسه مستقیم آن‌ها با روش‌های عددی برنامه‌نویسی‌شده در محیط Visual Basic، امکان ارزیابی عملی و واقع‌گرایانه روش‌ها را برای کاربردهای مهندسی فراهم کرده است. انجام تحلیل حساسیت کمی چندپارامتری و ارائه معیارهای روشن برای انتخاب روش مناسب در مراحل طراحی و بهره‌برداری، از دیگر جنبه‌هایی است که این پژوهش را از مطالعات مشابه متمایز می‌سازد.

۲. مواد و روش‌ها

۲-۱. نرم‌افزارهای مورد استفاده در کدنویسی پروفیل برگشت آب

در این پژوهش، برای پیاده‌سازی روش‌های مختلف محاسبه پروفیل برگشت سطح آب، از دو محیط کدنویسی متمایز و مکمل با کاربری‌های خاص بهره گرفته شده است: نرم‌افزار Wolfram Mathematica و محیط توسعه Visual Basic (VB6). انتخاب این دو بستر بر اساس ویژگی‌های تحلیلی و عددی مورد نیاز برای اجرای دقیق الگوریتم‌ها انجام گرفته است.

¹⁹ Rapid Application Development – RAD

¹⁸ Symbolic Engine

۲-۲-۲. روش باخمتف

در این روش، ضریب عددی پیچیده‌تری NN به‌عنوان نمای توان در زیر انتگرال وارد می‌شود و فرمول تقریباً مشابهی با روش برس دارد با این تفاوت که:

$$x - x_0 = \int_{y_0}^y \frac{1}{1-u^{NN}} du \quad (3)$$

که توان NN بسته به نوع کانال، توزیع سرعت و شرایط هندسی تغییر می‌کند [۱۸]. این روش انعطاف‌پذیرتر از روش برس بوده و برای هندسه‌های غیرموازی و جریان‌های غیرخطی مناسب‌تر است، اما وابسته به دقت در انتخاب پارامتر NN خواهد بود.

۲-۲-۳. روش باخمتف - چاو

این روش تابع ساختار هر دو روش قبلی را دارد اما با تصحیحات توان MM و NN هم‌زمان، که دقت بیشتری در هدایت جریان به‌ویژه در شرایط نزدیک به عمق بحرانی ارائه می‌کند.

$$x - x_0 = \int \left[\int \frac{u^g}{1-u^{NN}} du - u \right] \frac{r}{s} du \quad (4)$$

که در آن $MM-NN=g$ و پارامترهای مرتبط با هندسه و عمق بحرانی به‌صورت دقیق تعریف و حل می‌شوند. این روش مناسب برای شرایط ترکیبی در بالادست و پایین‌دست بوده و در نزدیکی نقاط بحرانی رفتار پایدارتری دارد ولی نیاز به محاسبات عددی دقیق در آن اجتناب‌ناپذیر است. اما روش‌های عددی گام‌به‌گام به قرار زیر می‌باشند:

۲-۲-۴. رانگ-کوتای مرتبه چهارم

این روش به حل مستقیم معادله اصلی dy/dx در قالب گام‌های کوچک dx می‌پردازد. در هر گام، چهار نقطه میانی محاسبه شده و از ترکیب وزن‌دار آن‌ها مقدار جدید به دست می‌آید. رابطه عمومی چهار مرحله‌ای به‌صورت زیر است:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \quad (5)$$

$$k_1 = f(x_n, y_n) \quad (6)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{dx}{2}, y_n + \frac{dx}{2}k_1\right) \quad (7)$$

استفاده از این دو نرم‌افزار به‌صورت مکمل، این امکان را فراهم ساخته است که هم روش‌های تحلیلی و هم روش‌های عددی، با دقت بالا، در محیط‌هایی متناسب با نیاز الگوریتم اجرا شوند، انتخابی که به افزایش قابلیت اطمینان در مقایسه روش‌ها و تحلیل عملکرد آن‌ها در شرایط یکسان منجر گردیده است.

۲-۲. روش‌های محاسباتی

تحلیل پروفیل برگشت سطح آب در جریان متغیر تدریجی معمولاً از معادله زیر شروع می‌شود:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f}{1 - Fr^2} \quad (1)$$

که در آن S_0 شیب کانال، S_f شیب اصطکاکی و Fr عدد فرود است [۱۶]. با توجه به ساختار معادله و نیاز به حل عددی یا تحلیلی آن، شش روش در این پژوهش بررسی می‌شود. روش‌های انتگرال‌گیری مستقیم^{۲۰} (تحلیلی) شامل:

۲-۲-۱. روش برس

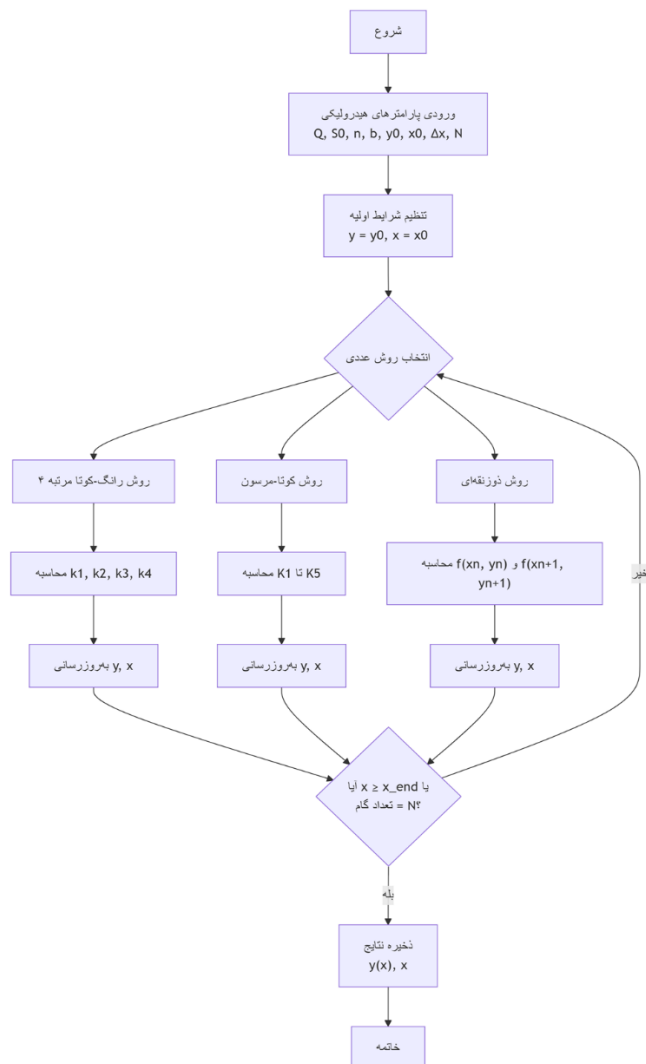
برس اولین کسی بود که راه‌حل تحلیلی معادله جریان تدریجی را برای کانال‌های تقریباً مستطیلی ارائه داد [۱۷]. این روش فرض می‌کند که جریان در یک کانال منشوری شکل، به‌آرامی متغیر است و تغییرات انرژی به‌صورت پیوسته در طول مسیر اتفاق می‌افتد. تجزیه و تحلیل او منجر به رابطه انتگرالی زیر شد:

$$x - x_0 = \int_{y_0}^y \frac{r(y)}{u^3(y)} dy \quad (2)$$

که در آن $r(y)$ ضریب ابهام هندسی و $u(y)$ نسبت سرعت محلی به عمق بحرانی است. در پیاده‌سازی Mathematica، از NIntegrate برای محاسبه این انتگرال استفاده می‌شود و FindRoot برای حل کردن عمق بحرانی یا پارامتر r لازم است. دقت بالا در نزدیکی عمق بحرانی از ویژگی‌های این روش می‌باشد.

²⁰ Direct Integration

محاسباتی روش های عددی گام به گام عددی در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱. فلوچارت فرآیند محاسباتی روش های عددی گام به گام عددی

۳-۲. داده های مشاهداتی

به منظور نمایش قابلیت های روش های تحلیلی و عددی و مقایسه آن با داده های واقعی، یک مقطع تیپ از کانال اصلی انتقال/توزیع بتنی در شبکه های آبیاری سد دز به عنوان مطالعه موردی انتخاب شد. مشخصات هیدرولیکی-هندسی آن عبارتند از: دبی ۲۰ متر مکعب در ثانیه، مقطع دوزنقه ای با عرض کف ۵ متر و شیب دیواره ۲/۵، شیب بستر برابر ۰/۰۰۱ و ضریب زبری ۰/۰۱۴ که برای این شرایط، رژیم

$$k_3 = f(x_n + \frac{dx}{2}, y_n + \frac{dx}{2} k_2) \quad (8)$$

$$k_4 = f(x_n + dx, y_n + k_3 dx) \quad (9)$$

که در این جا $f(x,y)=(S_0-S_f)/(1-Fr^2)$ است. این روش دارای دقت بالایی بوده و مناسب برای حل معادلات غیرخطی مانند معادله جریان تدریجی می باشد.

۵-۲-۲. روش کوتا - مرسون

این روش نسخه ای اصلاح شده از رانگ-کوتا است که در پنج مرحله اجرای گام به صورت ترکیبی انجام می شود تا خطا کنترل شده تر باشد. با انتخاب ضرایب K_1 تا K_5 و ترکیب وزن دار، دقت بالا با هزینه محاسباتی منطقی فراهم می آید. در بسیاری از پیاده سازی های هیدرولیکی، ویژگی خطای پایین و پایداری مناسب آن برجسته شده است.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_4 + k_5) \quad (10)$$

$$k_1 = f(x_n, y_n) \quad (11)$$

$$k_2 = f(x_n + \frac{1}{3}f, y_n + \frac{1}{3}k_1) \quad (12)$$

$$k_3 = f(x_n + \frac{1}{3}f, y_n + \frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{6}k_2) \quad (13)$$

$$k_4 = f(x_n + f, y_n + \frac{1}{2}k_1 - \frac{3}{2}k_3 + 2k_4) \quad (14)$$

۶-۲-۲. روش دوزنقه ای

این روش، یکی از ساده ترین تکنیک های تفاضل محدود برای حل dy/dx است که بر اساس میانگین مقدار مشتق در دو سر گام عمل می کند.

$$y_{n+1} = y_n + [f(x_{n+1}, y_{n+1}) + f(x_n, y_n)] \frac{dx}{2} \quad (15)$$

با استفاده از تکرار و تقریب خطی برای $f(x_{n+1}, y_{n+1})$ ، اگرچه این روش دقیق تر از روش اوایلر است، اما در مقایسه با رانگ-کوتا دقت آن پایین تر محسوب می شود. با این حال، اجرای آن ساده تر بوده و برای گام های کوچک دقت قابل قبولی ارائه می دهد. فلوچارت فرآیند

آن مقایسه گردید تا عملکرد مدل‌ها در پیش‌بینی طول و شکل پروفیل برگشت در یک کانال بتنی دوزنقه‌ای با دبی و شیب مشخص ارزیابی شود.

۴-۲. صحت سنجی با مدل HEC-RAS

به‌منظور بررسی کاربردی‌پذیری روش‌های ارائه‌شده در شرایط متداول پروژه‌های هیدرولیکی، تحلیل پروفیل پس‌زدگی جریان برای حالتی که کانال باز به یک پایین‌افتادگی ناگهانی (Drop) منتهی می‌شود نیز انجام شد. وجود دراپ موجب تغییر ناگهانی تراز انرژی و ایجاد شرایط کنترل‌شده در پایین‌دست می‌گردد که به‌طور مستقیم بر شکل و طول پروفیل بازگشتی در بالادست تأثیر می‌گذارد. در این مطالعه، اثر دراپ به‌صورت یک شرط مرزی تراز سطح آب در پایین‌دست لحاظ شده [۱۹] و محاسبات پروفیل در بالادست آن با استفاده از همان روش‌های تحلیلی و عددی مورد بررسی در مقاله انجام شده است. به‌منظور صحت‌سنجی نتایج، سناریوی مذکور به‌طور مستقل در نرم‌افزار HEC-RAS نیز مدل‌سازی شد و نتایج حاصل به‌عنوان مرجع مقایسه مورد استفاده قرار گرفت (جدول ۲ و شکل ۲).

زیر بحرانی جریان خواهد بود. تحلیل‌های پایداری، حساسیت و کارایی محاسباتی در این مطالعه بر اساس این پارامترها بوده و نتایج به‌دست‌آمده را می‌توان به مقاطع مشابه در شبکه‌های انتقال و آبیاری بتنی تعمیم داد.

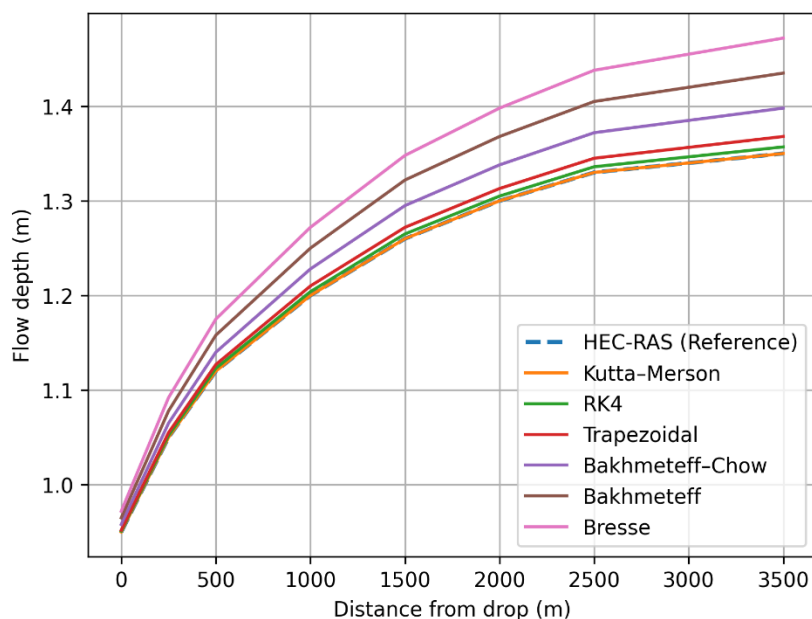
در پایین‌دست مقطع مورد مطالعه، یک سازه کنترل جریان از نوع دریچه سرریزدار²¹ وجود دارد که در اثر بهره‌برداری، باعث افزایش تراز آب در محل مانع به میزان تقریبی ۳ متر نسبت به تراز جریان نرمال گردیده است. این افزایش تراز موجب تشکیل یک پروفیل پس‌زدگی آب از نوع M1 در بالادست مانع شد. برداشت و تحلیل پروفیل به‌گونه‌ای انجام شد که سطح آب از محل مانع به‌تدریج کاهش یافته و در فاصله‌ای معادل ۳۲۵۰ متر به عمق نرمال می‌رسد. این طول پس‌زدگی آب با استفاده از هر شش روش بررسی‌شده (سه روش عددی گام‌به‌گام و سه روش تحلیلی انتگرالی) محاسبه و مقایسه گردید.

در برداشت هندسی-هیدرولیکی پروفیل، فرض شد که شرایط جریان یکنواخت در بالادست برقرار بوده و اثرات جانبی نظیر نفوذ یا تبخیر ناچیز هستند. پروفیل مرجع بر اساس روابط دقیق مانینگ و معادلات جریان تدریجی متغیر به‌دست آمد و سپس، نتایج حاصل از هر روش با

جدول ۲. خصوصیات روش‌های عددی و تحلیل بررسی از جنبه‌های گوناگون

فاصله از دراپ (m)	HEC-RAS (m)	کوتا-مرسون (m)	رانگ-کوتا مرتبه چهار (m)	دوزنقه‌ای (m)	باخمتف-چاو (m)	باخمتف (m)	برس (m)
۰	۰/۹۵۰	۰/۹۵۰	۰/۹۵۱	۰/۹۵۲	۰/۹۵۸	۰/۹۶۵	۰/۹۷۲
۲۵۰	۱/۰۵۰	۱/۰۵۰	۱/۰۵۲	۱/۰۵۵	۱/۰۶۵	۱/۰۷۸	۱/۰۹۲
۵۰۰	۱/۱۲۰	۱/۱۲۰	۱/۱۲۳	۱/۱۲۷	۱/۱۴۰	۱/۱۵۸	۱/۱۷۵
۱۰۰۰	۱/۲۰۰	۱/۲۰۰	۱/۲۰۴	۱/۲۱۰	۱/۲۲۸	۱/۲۵۰	۱/۲۷۲
۱۵۰۰	۱/۲۶۰	۱/۲۶۰	۱/۲۶۴	۱/۲۷۲	۱/۲۹۵	۱/۳۲۲	۱/۳۴۸
۲۰۰۰	۱/۳۰۰	۱/۳۰۰	۱/۳۰۵	۱/۳۱۳	۱/۳۳۸	۱/۳۶۸	۱/۳۹۸
۲۵۰۰	۱/۳۳۰	۱/۳۳۰	۱/۳۳۶	۱/۳۴۵	۱/۳۷۲	۱/۴۰۵	۱/۴۳۸
۳۵۰۰	۱/۳۵۰	۱/۳۵۰	۱/۳۵۶	۱/۳۶۸	۱/۳۹۸	۱/۴۳۵	۱/۴۷۲

²¹ Weir-Gated Structure



شکل ۲. مقایسه پروفیل‌های سطح آب در حالت وجود دراپ در کانال‌های عددی و تحلیلی

۳. نتایج و بحث

۳-۱. مقایسه نتایج روش‌های تحلیلی و عددی

در این بخش، نتایج حاصل از شبیه‌سازی پروفیل برگشت آب با استفاده از دو دسته روش، شامل روش‌های تحلیلی مبتنی بر انتگرال‌گیری مستقیم و روش‌های عددی مبتنی بر حل گام‌به‌گام معادلات جریان، ارائه و تحلیل می‌شود. ابتدا عملکرد هر گروه روش‌ها به صورت جداگانه مورد بررسی قرار گرفته و سپس با یکدیگر مقایسه می‌شوند. در ادامه، مقادیر به دست آمده از هر روش با داده‌های مشاهداتی ارزیابی شده و شاخص‌های آماری نظیر ریشه میانگین مربعات خطا (RMSE) به منظور سنجش دقت محاسبات به کار گرفته شده است. این رویکرد امکان ارزیابی کمی و کیفی توانایی هر روش در بازتولید رفتار واقعی جریان را فراهم می‌سازد [۲۰].

۳-۱-۱. تحلیل نتایج روش‌های تحلیلی (انتگرال‌گیری مستقیم)

سه روش تحلیلی برس، باخمتف و باخمتف-چاو به منظور محاسبه پروفیل برگشت آب مورد استفاده قرار گرفتند. این روش‌ها مبتنی بر حل انتگرال‌گیری مستقیم و استفاده از تقریب‌های تحلیلی برای متغیرهای هندسی و هیدرولیکی جریان هستند. همان‌گونه که در جداول و خروجی‌های حاصل از مدل‌سازی مشاهده می‌شود، تعداد

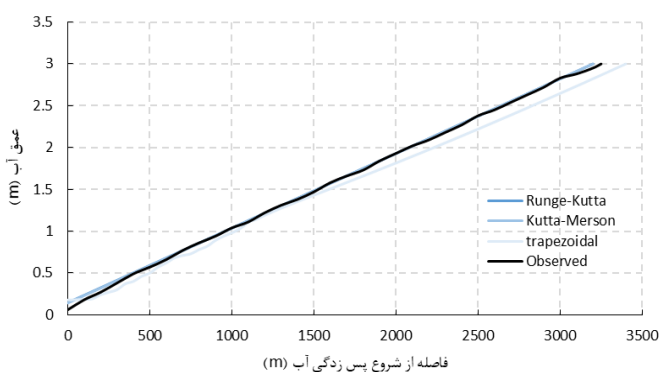
نقاط محاسبه شده در این روش‌ها نسبتاً محدود بوده (برای مثال در روش برس تنها ۵ نقطه و در روش‌های باخمتف و باخمتف-چاو به ترتیب ۶ و ۷ نقطه)، که این امر سبب کاهش دقت در بازنمایی تغییرات موضعی پروفیل جریان می‌گردد (شکل ۳).

بر اساس مقایسه نتایج این سه روش با داده‌های مشاهداتی، مقادیر شاخص خطای RMSE به ترتیب برای روش‌های برس، باخمتف و باخمتف-چاو برابر با حدود ۰/۸۱، ۰/۵۵ و ۰/۵۴ برآورد گردید. همچنین، مقادیر Bias محاسبه شده نشان داد که هر سه روش تمایل به بیش‌برآوردی ارتفاع سطح آب نسبت به مقادیر واقعی دارند (جدول ۱). این بیش‌برآوردی ناشی از استفاده از مقادیر میانگین هندسی و هیدرولیکی در فرایند انتگرال‌گیری بوده و در کنار پراکندگی نقاط خروجی، دقت مکانی این روش‌ها را محدود ساخته است [۲۱].

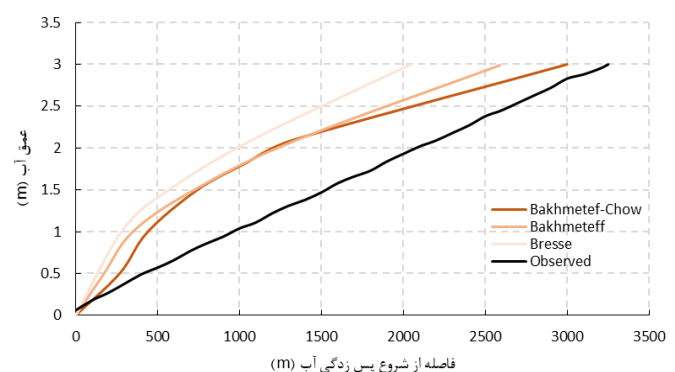
به طور کلی، نتایج حاکی از آن است که روش‌های تحلیلی برای تخمین سریع شکل کلی پروفیل برگشت آب و تحلیل حساسیت پارامترهای کلان مناسب بوده، اما برای کاربردهایی که نیازمند دقت بالا و مقایسه موضعی با داده‌های مشاهداتی هستند، باید با افزایش تعداد نقاط محاسباتی یا کالیبراسیون دقیق پارامترهایی نظیر ضریب زبری مانینگ (n) مورد استفاده قرار گیرند.

۲-۱-۳. تحلیل نتایج روش‌های عددی

سه روش عددی رانگ-کوتای مرتبه چهارم، کوتا-مرسون و دوزنقه‌ای نیز به‌منظور شبیه‌سازی پروفیل برگشت آب به کار گرفته شدند. این روش‌ها، به‌ویژه دو روش اول، با استفاده از گام فضایی ثابت (۵۰ متر) خروجی‌هایی با دقت و تراکم بالا تولید نمودند که امکان مقایسه مستقیم و هم‌مکان با داده‌های مشاهداتی را فراهم ساخت (شکل ۴).



شکل ۴. پروفیل سطح پس‌زدگی آب محاسبه شده با روش‌های عددی



شکل ۳. پروفیل سطح پس‌زدگی آب محاسبه شده با روش‌های تحلیلی

جدول ۳. تحلیل آماری توانایی مدل‌های مختلف در تعیین پروفیل پس‌زدگی آب در کانال

روش	تعداد نقاط مقایسه	RMSE	MAE	Bias	بیشینه خطا
برس	۵	۰/۸۱	۰/۷۲	۰/۷۰	۱/۰۷
باخمتف	۶	۰/۵۵	۰/۴۹	۰/۴۷	۰/۷۷
باخمتف-چاو	۷	۰/۵۴	۰/۴۵	۰/۴۳	۰/۷۹
رانگ-کوتا	۶۵	۰/۴۷	۰/۳۸	۰/۳۷	۰/۱۳
کوتا-مرسون	۶۵	۰/۴۵	۰/۳۶	۰/۳۴	۰/۱۳
دوزنقه‌ای	۶۹	۰/۰۹۶	۰/۰۸۲	-۰/۰۷۳	۰/۱۹

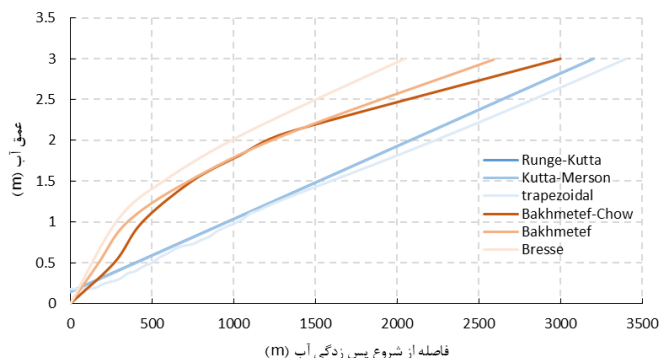
۳-۱-۳. مقایسه روش‌های تحلیل و عددی

نتایج به‌دست آمده بیانگر برتری آشکار روش‌های عددی نسبت به روش‌های تحلیلی از نظر دقت آماری است. همان‌گونه که مقادیر RMSE نشان می‌دهد، خطای استاندارد در روش‌های عددی کمتر از روش‌های تحلیلی است.

افزون بر این، روش‌های عددی با ارائه خروجی‌های پیوسته و با تراکم بالا، امکان مقایسه دقیق‌تری با اندازه‌گیری‌های میدانی را فراهم

با توجه به ماهیت الگوریتمی، دو روش رانگ-کوتای مرتبه چهارم و کوتا-مرسون به‌عنوان روش‌های چندمرحله‌ای با مرتبه بالای دقت، توانسته‌اند با تطابق بسیار خوب با داده‌های واقعی، خطاهای محلی را به حداقل برسانند. روش دوزنقه‌ای، هرچند ساده‌تر و محاسباتی سبک‌تر است، اما حساسیت بیشتری به انتخاب گام محاسباتی و نحوه محاسبه شیب اصطکاک داشته و در صورت عدم تنظیم مناسب این پارامترها، دقت آن کاهش می‌یابد.

تحلیل‌های حساسیت مفید باشند، مشروط بر آنکه پارامترهای آن‌ها به‌درستی کالیبره شده و تعداد نقاط محاسباتی کافی باشد.



شکل ۵. مقایسه پروفیل‌های سطح پس‌زدگی آب محاسبه شده با روش‌های تحلیلی و عددی

۳-۲. تحلیل حساسیت نسبت به پارامترهای هیدرولیکی

تحلیل حساسیت به‌منظور بررسی چگونگی تأثیر تغییرات پارامترهای ورودی مدل اعم از پارامترهای کنترلی مانند دبی Q و پارامترهای هندسی/اصطکاکی مانند شیب بستر s ، ضریب زبری مانینگ n و عرض کف b بر خروجی مدل‌ها یعنی پروفیل برگشت آب و طول پس‌زدگی انجام پذیرفته است [۲۳]. در این بخش، تحلیل حساسیت به‌صورت کیفی-مقایسه‌ای و همچنین کمی اجرا شده است. هدف عبارت است از شناسایی جهت و وسعت تأثیر هر پارامتر روی شکل و طول پروفیل و نیز تشخیص روش‌هایی که نسبت به تغییرات پارامترها بیشترین واکنش را نشان می‌دهند.

برای قضاوت کمی درباره حساسیت روش‌ها و توان بازتولید پروفیل برگشت، از شاخص‌های آماری استاندارد شامل $RMSE$ ، MAE ، $Bias$ و بیشینه خطا استفاده شد. همچنین برای قابل‌مقایسه کردن مقادیر خطا در مقیاس عمق پارامتر نسبت $RMSE$ به میانگین مشاهدات ($Rel. RMSE\%$) و نسبت $Bias$ به میانگین ($Rel. Bias\%$) محاسبه گردید. روابط ۱۶ و ۱۷ این پارامترها را تفسیر می‌نمایند که در آنها $\bar{y}_{Obs}$ میانگین اعماق مشاهداتی می‌باشد:

$$Rel. RMSE(\%) = \frac{RMSE}{\bar{y}_{Obs}} \times 100 \quad (16)$$

$$Rel. Bias(\%) = \frac{Bias}{\bar{y}_{Obs}} \times 100 \quad (17)$$

می‌کنند. در مقابل، روش‌های تحلیلی عمدتاً خروجی‌های پراکنده و مبتنی بر تقریب‌های کلی ارائه می‌دهند.

از نظر برآورد طول پروفیل برگشت آب، روش‌های عددی رانگ-کوتای مرتبه چهارم و کوتا-مرسون طولی در حدود ۳۲۰۰ متر برای رسیدن به عمق ۳ متر برآورد نمودند که بسیار نزدیک به طول مشاهداتی ۳۲۵۰ متر است (جدول ۴). در حالی که روش‌های تحلیلی مقادیر متنوعی بین ۲۰۴۶ متر (باخمتف-چاو) تا ۳۰۰۰ متر (برس) گزارش کردند که نشان‌دهنده پراکندگی قابل توجه پیش‌بینی‌ها در این دسته از روش‌ها است. از نظر سرعت و پیچیدگی پیاده‌سازی، روش‌های تحلیلی در نرم‌افزارهایی مانند Mathematica قابلیت اجرا و محاسبه سریع دارند، ولی در کاربردهایی که دقت محلی اهمیت بالایی دارد، روش‌های عددی مبتنی بر الگوریتم‌های چندمرحله‌ای و قابل تنظیم مانند رانگ-کوتای مرتبه چهارم و کوتا-مرسون توصیه می‌شوند.

جدول ۴. طول پروفیل برگشت آب تا عمق ۳ متر در روش‌های مختلف

روش	طول پروفیل (m)
مشاهداتی	۳۲۵۰
برس	۳۰۰۰
باخمتف	۲۵۸۹
باخمتف-چاو	۲۰۴۶
رانگ-کوتا	۳۲۰۰
کوتا-مرسون	۳۲۰۰
دوزنقه‌ای	۳۴۰۰

بررسی نتایج نشان داد که روش‌های عددی، به‌ویژه کوتا-مرسون و رانگ-کوتای مرتبه چهارم، با دقت بسیار بالاتر و انطباق بهتر با داده‌های مشاهداتی نسبت به روش‌های تحلیلی عمل کرده‌اند. روش دوزنقه‌ای اگرچه ساده و قابل پیاده‌سازی سریع است، اما در مقایسه با دو روش عددی پیشرفته‌تر از دقت پایین‌تری برخوردار بوده و گرایش به کم‌برآوردی را نشان داده است (شکل ۵).

در مجموع، می‌توان نتیجه گرفت که برای تحلیل‌های دقیق و مقایسه با داده‌های میدانی، استفاده از روش‌های عددی با مرتبه بالای دقت توصیه می‌شود. روش‌های تحلیلی می‌توانند در مراحل اولیه طراحی یا

چندمرحله‌ای حساسیت بیشتری نسبت به تغییرات پارامترهای هیدرولیکی نشان می‌دهند و برای مطالعات حساسیت دقیق‌تر توصیه می‌شوند. در مقابل، روش‌های تحلیلی بیشتر تصویر کلی و میانگین‌گونه‌ای از اثر پارامترها ارائه می‌کنند و برای سناریوهای طراحی سریع یا تحلیل‌های مقدماتی مناسب‌اند.

جدول ۵. مقایسه کیفی حساسیت روش‌های مختلف به پارامترها

پارامتر ورودی				روش
دبی (Q)	شیب بستر (S)	زبری (n)	عرض (b)	
متوسط	متوسط	متوسط	متوسط	برس
متوسط	متوسط	متوسط	متوسط	باخمتف
متوسط	متوسط	متوسط	متوسط	باخمتف-چاو
بالا	بالا	بالا	بالا	رانگ-کوتا
بالا	بالا	بالا	بالا	کوتا-مرسون
متوسط-بالا	بالا	متوسط-بالا	متوسط	دوزنقه‌ای

تفسیر کمی نتایج نشان می‌دهد برای مقادیر نسبی RMSE روش‌های عددی چندمرحله‌ای کوتا-مرسون و رانگ-کوتا مرتبه چهارم خطایی در حدود $2/8 - 2/9$ ٪ از میانگین عمق مشاهدات دارند. در حالی که در روش‌های تحلیلی RMSE نسبی در بازه $33 - 51$ ٪ قرار می‌گیرند. این اختلاف نمایانگر این است که روش‌های عددی حدود یک تا دو مرتبه دقت بالاتر نسبت به روش‌های تحلیلی در این مجموعه داده دارند. از منظر مهندسی، برای روش‌های تحلیلی خطای مهندسی بزرگی متصور می‌باشد.

روش‌های عددی رانگ-کوتا مرتبه چهارم و کوتا-مرسون به‌واسطه RMSE پایین و Bias کوچک (حدود $2/1 - 2/3$ ٪ از میانگین)، آماده نمایش تغییرات موضعی ناشی از تغییر پارامترهای Q، S، n و b هستند. بنابراین هرگونه تغییر پارامتر ورودی که منجر به تغییر کوچک در پروفیل گردد، در این روش‌ها با تغییر کمی مشهود در شاخص‌های آماری منعکس خواهد شد. روش‌های تحلیلی با RMSE و Bias بزرگ، به‌خصوص برس ($43/8$ ٪ از میانگین)، کمتر مناسب برای تحلیل کمی حساسیت‌اند مگر آنکه پارامترها تغییرات بزرگی داشته باشند یا پارامترهای مدل (مانند n) کالیبره شوند، زیرا این روش‌ها تغییرات موضعی کوچک را در مقیاس‌های بزرگ‌تری میانگین‌گیری می‌کنند و در نتیجه تغییرات آماری کوچک قابل تشخیص نخواهد بود.

پارامترهای Rel. Bias و Rel. RMSE خطا را نسبت به یک مقیاس مرجع بی‌واحد کرده و لذا حتی زمانی که واحد یا مقیاس متغیرها متفاوت هست، می‌توان مقایسه را انجام داد. روش‌های عددی چندمرحله‌ای کوتا-مرسون و رانگ-کوتا مرتبه چهارم که محاسبه محلی فرمول‌های سرعت و S_f را در هر گام انجام می‌دهند، قادر به بازنمایی تغییرات موضعی ناشی از تغییر Q به‌صورت دقیق‌تری هستند، بنابراین حساسیت بالاتری نسبت به تغییر دبی نشان می‌دهند. روش‌های تحلیلی که بر مبنای تقریب‌های میانگین و محاسبات انتگرالی با نقاط محاسباتی کم عمل می‌کنند، تغییرات موضعی را تا حدی صاف می‌کنند و حساسیت ظاهری کمتری خواهند داشت. از آنجا که محاسبه S_f و dy در پیاده‌سازی‌های فیل به‌صورت محلی و در هر تکرار انجام می‌شود، روش‌های عددی حساسیت بالایی نسبت به تغییر S نشان می‌دهند. روش‌های تحلیلی نیز به‌واسطه ورود S در معادلات انتگرالی تحت تأثیر قرار می‌گیرند اما به‌دلیل میانگین‌گیری‌ها و تعداد نقاط کمتر، پاسخ آن‌ها نسبت به تغییرات کوچک S نرم‌تر است.

افزایش n باعث افزایش تلفات اصطکاکی (S_f) شده که به کاهش سرعت و افزایش عمق نرمال می‌انجامد. از آنجا که محاسبه S_f به‌صورت صریح در کدهای هر دو گروه ظاهر است، کلیه روش‌ها به n حساس‌اند. با این وجود، روش‌های عددی به‌دلیل تفکیک فضایی ریزتر، تغییرات مکانی ناشی از n را واضح‌تر نشان می‌دهند. روش‌های تحلیلی ممکن است اثر کلی n را نشان دهند اما تغییرات موضعی را کمتر بازتولید کنند. همچنین بین روش‌های تحلیلی تفاوت وجود دارد. روش‌هایی که در فرمول‌بندی خود R و P را دقیق‌تر در قالب انتگرال لحاظ می‌کنند (مثلاً باخمتف نسبت به برس) می‌توانند پاسخ متفاوتی نسبت به تغییر n نشان دهند. همانند موارد پیشین، روش‌های عددی به دلیل محاسبه محلی A و R در هر گام، حساسیت موضعی بیشتری به تغییر b دارند. در روش‌های تحلیلی، چون پارامترهای هندسی در اغلب عبارت‌های انتگرالی میانگین‌گیری می‌شوند، اثرات تغییر b تا حدی میانگین‌سازی می‌شود. در عمل، وقتی b تغییر کند، روش‌های تحلیلی ممکن است در طول پروفیل شاهد تغییر کلی در شیب پروفیل باشند، ولی روش‌های عددی تغییرات مکانی دقیق‌تر را نشان می‌دهند.

جمع‌بندی کلی کیفی در مورد حساسیت روش‌ها نسبت به پارامترها در جدول ۵ ارائه شده است. نتایج نشان می‌دهد روش‌های عددی

جدول ۷. مقایسه کمی حساسیت روش های مختلف به پارامترها با استفاده از

شاخص آماری (Rel. Bias (%))

سناریو	رانگ-کوتا	کوتا-مرسون	دوزنقه ای
Q -/۱۰	-۰/۵۰۶	-۰/۵۰۶	-۰/۵۰۶
Q +/۱۰	۰/۵۶۱	۰/۵۶۱	۰/۵۶۲
b -/۱۰	۰/۳۷۱	۰/۳۷۱	۰/۳۷۲
b +/۱۰	-۰/۳۴۲	-۰/۳۴۲	-۰/۳۴۲
n -/۲۰	-۱/۸۹۷	-۱/۸۹۷	-۱/۸۹۸
n +/۲۰	۱/۸۷۳	۱/۸۷۳	۱/۸۷۳
s -/۱۰	۴/۱۰۲	۴/۱۰۲	۴/۰۹۹
s +/۱۰	-۳/۷۰۵	-۳/۷۰۵	-۳/۷۰۲

۳-۳. بررسی پایداری روش های تحلیلی و عددی

بررسی پایداری عددی و رفتار همگرایی روش های حل معادله جریان تدریجی متغیر، به ویژه در شبیه سازی پروفیل پس زدگی، از اهمیت بالایی برخوردار است. پایداری عددی تعیین می کند که آیا روش محاسباتی در شرایط گوناگون هندسی و هیدرولیکی می تواند بدون ایجاد نوسان یا واگرایی، نتایج معتبری ارائه دهد یا خیر. از سوی دیگر، تحلیل همگرایی نشان می دهد که با بهبود شرایط گام یا تلورانس محاسباتی، راه حل به چه میزان به مقدار واقعی نزدیک می شود. در این بخش، عملکرد سه روش عددی گام به گام و سه روش تحلیلی انتگرالی از نظر پایداری، همگرایی و حساسیت به شرایط بحرانی، بر اساس داده های به دست آمده از مطالعه حاضر، به صورت کمی و کیفی مقایسه شده است (جدول ۸).

۳-۳-۱. همگرایی و پایداری روش های عددی گام به گام

نتایج آزمون پایداری برای سه روش رانگ-کوتا مرتبه چهارم، کوتا-مرسون و دوزنقه ای نشان می دهد که در محدوده پارامترهای مورد بررسی در جریان زیر بحرانی، تمامی این روش ها از نظر رفتار عددی پایدار هستند و روند همگرایی یکنواختی را با کاهش گام محاسباتی از خود نشان می دهند. بر اساس جدول ۶، مقدار Rel. RMSE در گام نسبتاً بزرگ $\Delta x = 200$ m حدود 0.34 تا 0.42 درصد و در گام های کوچک تر ($\Delta x \leq 50$ m) کمتر از 0.08 درصد بوده است. این ارقام بیانگر آن است که حتی در شرایط استفاده از گام های بزرگ، خطای نسبی در مقیاس میانگین عمق پروفیل در حد بسیار پایین

تحلیل های کمی نشان داد که روش های عددی چند مرحله ای کوتا-مرسون و رانگ-کوتا مرتبه چهارم دقت کافی انجام تحلیل های حساسیت پارامتریک کمی را دارند ($Rel. RMSE \approx 2/8 - 2/9$ %). در حالی که روش های تحلیلی دارای خطای زمینه ای بزرگ تری بوده و برای تحلیل حساسیت دقیق نیاز به بهبود تنظیمات یا کالیبراسیون دارند ($Rel. RMSE \approx 33 - 51$ %). در ادامه تحلیل کمی اثر تغییر در مقادیر پارامترهای ورودی بر روی عملکرد هر یک از روش ها اجرا گردید. روش های تحلیل به دلیل عملکرد نامناسب در تخمین پروفیل سطح پس زدگی آب کنار گذاشته شده اند. بر این اساس چند سناریوی مشخص $Q \pm 10\%$ ، $n \pm 20\%$ ، $s \pm 10\%$ و $b \pm 10\%$ اجرا و شاخص های آماری (Rel. Bias (%)) و (Rel. RMSE (%)) برای هر سناریو دقیقاً محاسبه شد (جداول ۶ و ۷).

مقادیر شاخص های (Rel. Bias (%)) و (Rel. RMSE (%)) در همه سه روش عددی مقادیر تقریباً یکسان اند که این امر نشان می دهد که برای پیاده سازی های عددی، تفاوت عملکرد حساسیتی بین این سه روش برای هر پارامتر ناچیز است. شیب بستر (s) بیشترین تأثیر نسبی را در Rel. RMSE نشان می دهد ($4/2 - 4/6$ %)، یعنی تغییر $\pm 10\%$ در s بیشترین تغییر کلی در شکل پروفیل را به همراه داشته است. ضریب زبری (n) در سناریو $20 \pm$ % دومین تأثیر قوی را دارد ($2/6 - 2/8$ %). همچنین Rel. Bias بزرگ تری را نسبت به Q یا b ایجاد می کند ($1/9 \pm$ %). این موضوع نشان می دهد که n تأثیر قابل توجهی بر عمق محلی دارد. دبی (Q) و عرض کف (b) با مقادیر Rel. RMSE حدود $0.6 - 1.0$ % نسبتاً حساسیت کمتری را نشان می دهند.

جدول ۶. مقایسه کمی حساسیت روش های مختلف به پارامترها با استفاده از

شاخص آماری (Rel. RMSE (%))

سناریو	رانگ-کوتا	کوتا-مرسون	دوزنقه ای
Q -/۱۰	۰/۸۲۳	۰/۸۲۳	۰/۸۲۳
Q +/۱۰	۰/۹۸۹	۰/۹۸۹	۰/۹۸۹
b -/۱۰	۰/۶۲۷	۰/۶۲۷	۰/۶۲۸
b +/۱۰	۰/۵۸۶	۰/۵۸۶	۰/۵۸۷
n -/۲۰	۲/۷۹۴	۲/۷۹۴	۲/۷۹۵
n +/۲۰	۲/۶۰۲	۲/۶۰۲	۲/۶۰۲
s -/۱۰	۴/۶۳۳	۴/۶۳۳	۴/۶۳۰
s +/۱۰	۴/۲۳۹	۴/۲۳۹	۴/۲۳۶

مطالعه پایداری بالایی دارند. با این حال، با نزدیک شدن شرایط جریان به ناحیه بحرانی، حساسیت عددی افزایش می‌یابد و توصیه می‌شود که از گام‌های کوچک‌تر (به‌ویژه در روش کوتاه-مرسون) استفاده شود تا از بروز خطاهای محلی و واگرایی جلوگیری گردد.

رفتار سطح آزاد جریان در شرایط نزدیک به عمق بحرانی ($F \approx 1$) تأثیر مستقیمی بر شکل پروفیل‌های پس‌زدگی دارد و باید در تحلیل دقیق حساسیت و طراحی مهندسی مدنظر قرار گیرد. پروفیل‌های جریان متغیر تدریجی می‌توانند به‌صورت نرمال‌سازی شده توسط عمق بحرانی تحلیل شوند که این کار فهم کامل‌تری از رفتار جریان نسبت به روش‌های ساده‌تر ارائه می‌دهد. علاوه بر این، خطاهای محاسباتی روش‌های استاندارد در نزدیکی شرایط بحرانی می‌تواند به‌طور قابل توجهی افزایش یابد، که اهمیت بررسی دقیق این ناحیه را تأکید می‌کند [۲۴ و ۲۵].

باقی می‌ماند. از منظر رفتار دینامیکی پروفیل، در هیچ‌یک از روش‌های عددی نوسان یا واگرایی مشاهده نشد و شمار گام‌های صعودی که نشانه تغییر جهت ناخواسته پروفیل است برابر صفر می‌باشد. این نکته اهمیت ویژه‌ای دارد، زیرا پروفیل پس‌زدگی آب در شرایط هیدرولیکی زیر بحرانی باید تک‌جهتی و هموار باشد و بروز هرگونه افزایش موضعی در عمق می‌تواند نشانه بی‌ثباتی عددی یا حساسیت به گام انتخابی باشد.

بررسی طول پروفیل محاسبه‌شده نیز نشان داد که گام‌های بزرگ تمایل به بیش‌برآورد طول دارند (۲۰۰۰ متر در گام ۲۰۰ متری در مقایسه با ۱۸۶۰ متر در گام ۵ متری). این روند مطابق انتظار برای طرح‌های صریح و نیمه‌صریح در حل معادله جریان متغیر تدریجی است، جایی که برون‌یابی در گام‌های بزرگ سبب انحراف مثبت طول می‌شود. در مجموع، هر سه روش عددی در محدوده پارامترهای مورد

جدول ۸. مقایسه پایداری و همگرایی روش‌های تحلیلی و عددی

دسته	روش	نوسان در پروفیل	پایداری در گام‌های بزرگ	همگرایی با ریزش گام/تلورانس	حساسیت نزدیک عمق بحرانی
تحلیلی	برس	خیر	—	همگرایی ادغامی پایدار	پایین تا متوسط (بسته به پارامترها)
تحلیلی	باخمتف	خیر	—	پایدار؛ حساسیت متوسط به توان‌های مؤثر	پایین تا متوسط
تحلیلی	باخمتف-چاو	خیر	—	پایدار؛ غالباً همگرا با تلورانس‌های پیش‌فرض	پایین تا متوسط
عددی	رانگ-کوتا	خیر	خوب	بسیار خوب	متوسط (وابسته به Δx)
عددی	کوتا-مرسون	خیر	خوب	بسیار خوب	متوسط
عددی	دوزنقه‌ای	خیر	نسبتاً خوب	خوب (کندتر از رانگ-کوتا و کوتا-مرسون)	کمی حساس‌تر به سختی معادله

هندسی و هیدرولیکی) و روش محاسبه پارامترهای میانی مانند r و y_c است، نه بی‌ثباتی عددی. در مواردی که شیب بستر بسیار کوچک یا ضریب زبری بالا باشد، احتمال کندی همگرایی یا نیاز به تغییر متغیر برای نرم‌کردن هسته انتگرال وجود دارد. به‌طور کلی، پایداری روش‌های تحلیلی در این مطالعه رضایت‌بخش بوده است و می‌توان با اعمال تنظیمات دقیق‌تر در کنترل تلورانس، از بروز خطای تجمعی جلوگیری کرد.

نتایج نشان داد در تحلیل‌ها برای سه روش تحلیلی، همگرایی پایدار و پروفیل‌های یکنواخت دیده می‌شود و نوسان ناشی از انتگرال‌گیری مشاهده نمی‌شود. نقاط پُرشیب هسته نزدیک نقاط بحرانی می‌توانند سرعت همگرایی را کم کنند و همچنین ریشه‌یابی‌های بینابینی (برای

۳-۲. همگرایی و پایداری روش‌های تحلیلی

سه روش تحلیلی برس، باخمتف و باخمتف-چاو در این مطالعه با استفاده از فرم انتگرالی معادله جریان تدریجی‌متغیر و تکنیک‌های عددی ادغام مستقیم (NIntegrate) پیاده‌سازی شده‌اند. ساختار این فرمول‌ها شامل انتگرال‌هایی است که در نزدیکی $u \rightarrow 1$ می‌توانند رفتار پُرشیب داشته باشند. با این حال، در محدوده داده‌های این مطالعه، دامنه انتگرال‌گیری از این نقاط بحرانی عبور نکرده و در نتیجه همگرایی انتگرال‌ها بدون مشکل حاصل شده است.

نتایج نشان می‌دهد که هر سه روش تحلیلی، در شرایط تلورانس پیش‌فرض نرم‌افزار، پروفیل‌های هموار و بدون نوسان تولید می‌کنند. اختلاف مشاهده‌شده در طول پروفیل‌ها بین این سه روش، بیشتر ناشی از تفاوت در فرمول‌بندی ریاضی (توان‌ها و ضرایب وابسته به پارامترهای

دارد، علت اصلی این تفاوت، ماهیت ساده تر هر گام محاسبه در روش های عددی و عدم نیاز به ارزیابی های سنگین انتگرالی است. از منظر پیچیدگی الگوریتمی، هر سه روش عددی دارای مرتبه $O(N)$ هستند، یعنی زمان محاسبه متناسب با تعداد گام ها رشد می کند. همچنین هر سه روش تحلیلی دارای مرتبه $O(M)$ هستند، یعنی زمان محاسبه متناسب با تعداد بخش بندی ها یا تکرارها می باشد. تفاوت اصلی میان آن ها در تعداد ارزیابی های تابع در هر گام است. روش رانگ-کوتای مرتبه ۴ با ۴ ارزیابی در هر گام سرعتی بالاتر از کوتا-مرسون با ۵ ارزیابی دارد، هرچند کوتا-مرسون به دلیل کنترل خطای محلی قابلیت افزایش پایداری در گام های بزرگ تر را دارد. روش دوزنقه ای کمترین تعداد ارزیابی در هر گام را دارد و بنابراین سریع تر است، اما همان طور که در بخش پایداری نشان داده شد، در شرایط نزدیک به بحرانی یا با گام های بزرگ ممکن است به دقت پایین تری منجر شود.

در دسته روش های تحلیلی، هزینه آن به طور مستقیم به تعداد بخش بندی ها یا تکرارها (M) وابسته است. روش باخمتف به دلیل ساختار ساده تر توابع درون انتگرال، کمی سریع تر از دو روش دیگر عمل کرده است. در حالی که باخمتف-چاو به واسطه وجود توان های کسری و دامنه های انتگرال گیری طولانی تر، زمان اجرای بیشتری نیاز دارد. در محیط Mathematica، همه روش ها به دلیل سربار داخلی موتور تحلیل گر و مدیریت داده، زمان بیشتری نسبت به Visual Basic دارند. دلیل این امر، بهینه سازی کمتر عملیات انتگرال گیری در Mathematica نسبت به پیاده سازی مستقیم و پردازش شده در Visual Basic است. در مجموع، از دید هزینه محاسباتی، اگر هدف دستیابی به سرعت بالا در شرایط با تعداد زیاد اجرا باشد، استفاده از روش های عددی گام به گام (به ویژه روش دوزنقه ای یا رانگ-کوتای مرتبه ۴ با گام مناسب در محیط Visual Basic) توصیه می شود. در مقابل، اگر دقت تحلیلی بالاتر و یا ارزیابی سریع برای تعداد کمی پروفیل مدنظر باشد، روش های تحلیلی با تنظیم تلورانس مناسب می توانند انتخاب قابل قبولی باشند.

r و y_c) اگر با حدس اولیه مناسب نباشد، ممکن است کندی همگرایی ایجاد شود. به ویژه در زبری های بالا یا شیب های خیلی کوچک. در این خصوص، روش های عددی در حل این مسئله زیر بحرانی، حتی با گام های بزرگ، پایدار و بدون نوسان بوده و با کاهش گام، همگرایی سریع و منظم را تجربه کرده اند. روش های تحلیلی به دلیل عدم استفاده از طرح گام به گام، تحت تأثیر گام فضایی قرار نمی گیرند و کیفیت همگرایی آن ها تابعی از رفتار هسته انتگرال و پارامترهای محاسباتی انتخابی است. حساسیت روش ها به شرایط بحرانی در عددی ها بالاتر از تحلیلی ها است، هرچند در سناریوی حاضر، این شرایط به وقوع نپیوسته است. در نهایت، انتخاب بین روش های عددی و تحلیلی باید با توجه به شرایط جریان، نیاز به دقت محلی، و امکانات محاسباتی انجام گیرد. روش های عددی گام به گام در شرایط نزدیک به بحرانی یا جریان های پیچیده انعطاف پذیری بیشتری دارند، در حالی که روش های تحلیلی، در صورت اطمینان از همگرایی انتگرال ها، می توانند سرعت بالاتری در محاسبه فراهم کنند.

۴-۳. بررسی زمان محاسبات و پیچیدگی الگوریتمی روش های تحلیلی و عددی

زمان محاسبه، بیانگر سرعت عملیاتی روش در یک محیط نرم افزاری مشخص است، در حالی که پیچیدگی الگوریتمی به نرخ رشد هزینه محاسباتی با افزایش اندازه مسئله (مانند تعداد گام ها یا نقاط انتگرال گیری) اشاره دارد. ترکیب این دو شاخص، دید روشنی از بازده محاسباتی هر روش ارائه می دهد و به انتخاب بهینه روش در کاربردهای واقعی کمک می کند. در این بخش، مدت زمان اجرای سه روش عددی گام به گام و سه روش تحلیلی انتگرالی در دو محیط Mathematica و Visual Basic اندازه گیری و مقایسه شده و هزینه محاسباتی آن ها بر اساس ساختار الگوریتمی تحلیل می شود (جدول ۹).

مقایسه نتایج جدول نشان می دهد که روش های عددی گام به گام به طور کلی زمان اجرای کوتاه تری نسبت به روش های تحلیلی انتگرالی دارند. این تفاوت در محیط Visual Basic محسوس تر است. به عنوان مثال، روش دوزنقه ای در Visual Basic تنها ۴/۱ میلی ثانیه زمان نیاز

جدول ۹. مقایسه پایداری و همگرایی روش‌های تحلیلی و عددی

دسته	روش	مدت زمان اجرا (S) (Mathematica)	مدت زمان اجرا (S) (Visual Basic)	پیچیدگی الگوریتمی تخمینی	ویژگی غالب در هزینه محاسبات
تحلیلی	برس	۲۳/۵	—	$O(M)^*$	انتگرال‌گیری عددی با M زیر-بازه — هزینه متناسب با تلورانس
تحلیلی	باخمتف	۲۱/۳	—	$O(M)$	مشابه برس ولی ساده‌تر در توان‌ها — کمی سریع‌تر
تحلیلی	باخمتف-چاو	۲۴/۱	—	$O(M)$	انتگرال‌های طولانی‌تر — توان‌های کسری — کمی کندتر
عددی	رانگ-کوتا	—	۴/۸	$O(N)^*$	۴ ارزیابی تابع در هر گام — هزینه خطی با N
عددی	کوتا-مرسون	—	۶/۱	$O(N)$	۵ ارزیابی تابع — کنترل خطای محلی — هزینه کمی بالاتر از رانگ-کوتا مرتبه ۴
عددی	دوزنقه‌ای	—	۴/۱	$O(N)$	۲ ارزیابی تابع در هر گام — سریع‌تر ولی وابسته به پایداری گام

* M: تعداد ارزیابی‌های تابع بسته به دقت و تقسیم‌بندی بازه - N: تعداد گام‌های حل عددی بسته به طول پروفیل و گام فضایی

تبدیل می‌کند. به‌طور خلاصه، انتخاب روش به ماهیت پروژه و الزامات دقت و زمان بستگی دارد:

- برای شبیه‌سازی سریع و شرایط متنوع: روش‌های عددی با طرح گام‌به‌گام.
- برای مطالعات پایه و مقایسه‌ای: روش‌های تحلیلی با کنترل دقیق تلورانس.

۴. نتیجه‌گیری

در این مطالعه، به‌منظور ارزیابی عملکرد روش‌های عددی و تحلیلی در پیش‌بینی پروفیل پس‌زدگی آب در کانال‌های باز، یک مقطع تیپ از کانال دوزنقه‌ای بتنی در نظر گرفته شد که سبب افزایش تراز سطح آب به میزان ۳ متر نسبت به عمق نرمال گردید و یک پروفیل برگشتی از نوع M1 با طول تقریبی ۳۲۵۰ متر در بالادست شکل گرفت. روش‌های مورد استفاده شامل سه روش عددی رانگ-کوتا مرتبه چهار، کوتا-مرسون و دوزنقه‌ای، و سه روش تحلیلی انتگرالی برس، باخمتف و باخمتف-چاو می‌باشند. حل تحلیلی با بهره‌گیری از نرم‌افزار Mathematica و با استفاده از انتگرال‌گیری مستقیم پیاده‌سازی شد، در حالی که حل عددی در محیط Visual Basic و با الگوریتم‌های گام‌به‌گام اجرا گردید.

نتایج نشان داد که در پیش‌بینی طول پس‌زدگی آب، روش‌های عددی به‌ویژه کوتا-مرسون با خطای نسبی کمتر نسبت به پروفیل مرجع و زمان محاسباتی کوتاه‌تر ۴/۱ تا ۶/۱ میلی‌ثانیه در Visual Basic بهترین عملکرد را داشتند. در مقابل، روش‌های تحلیلی با وجود دقت بالاتر، به دلیل نیاز به تکرارهای متعدد و حساسیت به تلورانس، زمان

۵-۳. بررسی زمان محاسبات و پیچیدگی الگوریتمی روش‌های تحلیلی و عددی

تحلیل انجام‌شده نشان داد که روش‌های عددی گام‌به‌گام در پروژه‌های هیدرولیکی واقعی، به‌ویژه در فاز طراحی اجرایی و بهره‌برداری، کاربردپذیری بالاتری دارند. سرعت بالای محاسبات، امکان مدل‌سازی شرایط پیچیده، و سهولت پیاده‌سازی در نرم‌افزارهای مهندسی باعث می‌شود این روش‌ها گزینه اول برای شبیه‌سازی و تصمیم‌گیری عملی باشند. با این حال، در شرایطی که جریان به حالت بحرانی نزدیک می‌شود یا حساسیت دقت بسیار بالاست، نیاز به تنظیم دقیق گام و روش حل وجود دارد. در مقابل، روش‌های تحلیلی انتگرالی بیشتر برای تحلیل‌های تئوریک و مقایسه‌ای مناسب‌اند. این روش‌ها در صورت همگرایی پایدار می‌توانند پروفیل‌هایی با دقت مناسب ارائه دهند، ولی به دلیل محدودیت در هندسه و شرایط مرزی، در پروژه‌های با پیچیدگی زیاد یا تغییرات موضعی، انعطاف‌پذیری کافی ندارند. همچنین، زمان محاسباتی بالاتر و حساسیت به ساختار هسته انتگرال، استفاده مستقیم آن‌ها را در فاز بهره‌برداری محدود می‌کند.

افزون بر این، نتایج نشان داد که همگرایی و پایداری عددی در روش‌های گام‌به‌گام با انتخاب گام مناسب به‌خوبی تضمین می‌شود و در پروژه‌هایی که به تحلیل‌های تکراری (مانند شبیه‌سازی چند سناریو، بهینه‌سازی یا تحلیل حساسیت) نیاز دارند، این ویژگی مزیت محسوسی ایجاد می‌کند. در چنین شرایطی، ترکیب سرعت بالا، کنترل‌پذیری دقت و انعطاف در شرایط مرزی متغیر، روش‌های عددی را به ابزار اصلی مهندسان طراح و بهره‌برداران شبکه‌های هیدرولیکی

همچنین بر اساس یافته‌های این پژوهش، پیشنهاد می‌شود در مطالعات آینده، توسعه روش‌های عددی تطبیقی با کنترل خودکار گام فضایی برای افزایش پایداری و دقت محاسبات در شرایط نزدیک به بحرانی مورد توجه قرار گیرد. به علاوه گسترش روش‌های تحلیلی با در نظر گرفتن هندسه‌های پیچیده‌تر کانال، تغییرات ناگهانی مقطع و حضور هم‌زمان چندین سازه هیدرولیکی می‌تواند کاربرد این روش‌ها را افزایش دهد. بررسی اثر عدم قطعیت پارامترهای هیدرولیکی، به‌ویژه ضریب زبری و شیب بستر، و ترکیب روش‌های کلاسیک با رویکردهای داده‌محور یا یادگیری ماشین نیز می‌تواند به بهبود پیش‌بینی پروفیل پس‌زدگی جریان در پروژه‌های واقعی منجر شود.

References

- [1] G. Gerber, G. Diedericks, and G. R. Basson, "Particle image velocimetry measurements and numerical modeling of a saline density current," *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 137, pp. 333–342, 2011.
- [2] V. T. Chow, *Open-channel hydraulics*. New York: McGraw-Hill, 1959.
- [3] M. Abbaspour, A. A. Keshavarzi, and M. Afshar, "Numerical modeling of backwater flow in compound channels using modified Runge-Kutta method," *KSCE Journal of Civil Engineering*, vol. 18, no. 1, pp. 173–180, 2014.
- [4] J. A. Cunge, F. M. Holly Jr., and A. Verwey, *Practical aspects of computational river hydraulics*. Pitman Publishing, London, 1980.
- [5] C. M. Niebuhr, C. Hill, M. Van Dijk, and L. Smith, "Development of a Hydrokinetic Turbine Backwater Prediction Model for Inland Flow through Validated CFD Models," *Processes*, vol. 10, no. 7: 1310, 2022.
- [6] S. Hellmers, and P. Fröhle, "Computation of backwater effects in surface waters of lowland catchments including control structures – an efficient and re-usable method implemented in the hydrological open-source model Kalypso-NA (4.0)," *Geoscientific Model Development*, vol. 15, pp. 1061, 2022.

محاسباتی بیشتری را از $21/3$ تا $24/1$ میلی‌ثانیه در Mathematica به خود اختصاص داده‌اند. تحلیل حساسیت کمی نشان داد که بیشترین تغییرات طول پس‌زدگی آب ناشی از تغییر شیب بستر و ضریب زبری است، به‌طوری که کاهش 20% در S_0 موجب افزایش طول پروفیل تا بیش از 30% گردید، در حالی که تغییر مشابه در عرض کف اثر نسبی کمتری داشت. شاخص‌های آماری نظیر Rel.RMSE و Rel.Bias نیز این الگو را تأیید کردند، به‌گونه‌ای که برای پارامتر n بیشترین مقادیر این شاخص‌ها ثبت شد.

از نظر پایداری عددی، هر سه روش گام‌به‌گام در شرایط زیر بحرانی بدون نوسان و واگرایی عمل کردند و با کاهش گام، همگرایی یکنواختی داشتند. در روش‌های تحلیلی، کنترل دقیق تلورانس برای جلوگیری از افت دقت یا افزایش بیش از حد زمان محاسبه ضروری بود. به‌طور کلی، نتایج این مطالعه نشان می‌دهد که برای پروژه‌های واقعی با شرایط مشابه مطالعه موردی حاضر یعنی کانال‌های بتنی با دبی متوسط، شیب ملایم و رژیم زیر بحرانی، روش‌های عددی گام‌به‌گام تطبیقی به دلیل ترکیب سرعت، دقت و انعطاف، مناسب‌ترین گزینه برای طراحی و بهره‌برداری هستند، در حالی که روش‌های تحلیلی پیاده‌سازی شده در Mathematica می‌توانند به‌عنوان مرجع دقیق برای مطالعات پایه و مقایسه‌ای مدل‌های عددی استفاده شوند.

در کنار مزایای روش‌های بررسی‌شده، نتایج این پژوهش نشان می‌دهد که روش‌های عددی گام‌به‌گام در نزدیکی شرایط بحرانی به انتخاب گام فضایی حساس بوده و برای حفظ پایداری و دقت، نیازمند کاهش گام محاسباتی هستند، در حالی که روش‌های تحلیلی انتگرالی به دلیل فرضیات ساده‌ساز، در تحلیل هندسه‌های پیچیده و تغییرات ناگهانی مقطع با محدودیت مواجه می‌باشند. از سوی دیگر، تحلیل حساسیت کمی بیانگر آن است که در میان پارامترهای هیدرولیکی مورد بررسی، شیب بستر و ضریب زبری منینگ بیشترین تأثیر را بر طول و شکل پروفیل پس‌زدگی جریان دارند، به‌گونه‌ای که تغییرات آن‌ها می‌تواند به‌طور مستقیم منجر به افزایش عدم قطعیت در پیش‌بینی تراز سطح آب شود. این نتایج نشان می‌دهد که در طراحی مهندسی کانال‌های باز و سازه‌های مرتبط، تعیین دقیق شیب بستر و کالیبراسیون مناسب ضریب زبری از اهمیت بالاتری نسبت به سایر پارامترها برخوردار بوده و می‌تواند نقش تعیین‌کننده‌ای در افزایش ایمنی هیدرولیکی و دقت طراحی ایفا کند.

- [15] T. P. Kalaryti, "Numerical Study of Turbulent Open-Channel Flow Through Submerged Rigid Vegetation," *Water*, vol. 17, no. 14: 2156, 2025.
- [16] J. A. M. Marcacuzco, and E. P. Vargas, "Computation of Gradually Varied Flow by Fourth Order Runge-Kutta Method (SRK)," E-proceedings of the 38th IAHR World Congress September 1-6, 2019, Panama City, Panama
- [17] Vatankhah, AR., "Direct Integration of Manning-Based GVF Equation," ASCE HE, 2012
- [18] Bakhmeteff, B. A. *Hydraulics of open channels*, McGraw-Hill, New York, 1932.
- [19] Khorami, E., Heidari, M.M., Ghobadian, R. Accuracy Evaluation of Methods for Determining Jet Trajectory Characteristics in Flip Bucket. *Environment and Water Engineering* 9(4), 499-514. 2023
- [20] Ansary S., Kahrizi E., Fazli M. Numerical simulation of bed topography and flow field around double rows-barriers and gabion groyne in the direct channel using Flow-3D. *Environment and Water Engineering* 5(1), 58–70. 2019
- [21] Mehrabani, M., Khalaj, M., Banejad, H. Experimental investigation of discharge characteristics of an adjustable cylindrical weir-gate under weir-only, gate-only, and combined flow conditions. *Advances in Civil Engineering and Environmental Science* 4(1), 25-35. 2026
- [22] Sajadi, S.M., Esmailzadeh Feridani, F., Ahadiyan, J. Numerical study of energy loss and Stype hydraulic jump length using cross beams as roughness in sudden expansion. *Advanced Technologies in Water Efficiency* 5 (1), 78-97. 2025
- [23] Monifi, A., Heidari, M.M., Adibrad, M.H. Development of a two-dimensional flow model using a time-splitting scheme and regular rectangular mesh. *Advanced Technologies in Water Efficiency* 5 (2), 94- 115. 2025
- [19] Jan, C.-D., Chen, C.-L. Gradually varied open-channel flow profiles normalized by critical depth and analytically solved using
- [7] P. Ouro, L. Cea, S. Croquer, W. Dong, O. Garcia-Feal, A. Navas-Montilla, B. D. Rogers, T, Uchida. C. Juez, "Benchmark of computational hydraulics models for open-channel flow with lateral cavities," *Journal of Hydraulic Research*, 2024.
- [8] P. Xie, S. Lv, Z. Li, Y. Zhang, and J. Lv, "Numerical Simulation Study on Three-Dimensional Flow Characteristics and Probability Density Distribution of Water-Permeable Gabion Backflow Zone in Different Curvature Bends," *Water*, vol. 16, no. 16: 2247, Aug. 2024.
- [9] H. Q. Zhao, J. Yan, S. Y. Yuan, J. F. Liu, and J. Y. Zheng, "Effects of submerged vegetation density on turbulent flow characteristics in an open channel," *Water*, vol. 11, p. 2154, 2021.
- [10] C. A. M. E. Wilson, T. Stoesser, P. D. Bates, and A. B. Pinzen, "Open channel flow through different forms of submerged flexible vegetation," *J. Hydraulic Eng.*, vol. 129, pp. 847–853, 2003.
- [11] S. B. Weerakoon, Y. Kawahara and N. Tamai, "Three-dimentional flow structure in channel confluences of rectangular section.," *Proceedings of the XXIV Congress, International Association for Hydraulic Research*, Madrid, Spain, pp. A373-A380, 1991.
- [12] A. Zahran, T. A. Gado, and E. Rashwan, "Comparison between Numerical, Analytical, and Field Solutions with Experimental Data for 90° Open Channel Junctions," *Journal of Engineering Research*, vol. 3, no. 3, 2022.
- [13] Q. Zhou, Zh. Li, Zh. Jin, Y. Wang, P. Chen, Y. Liu, Y. Liu, and X. Yang, "Experimental Investigation of the Effects of Backwater on the Velocity Distribution Characteristics in a 90-Degree Curved Channel ," *Water*, vol. 17, no. 13: 1858, 2025.
- [14] R. I. Ponce-Segovia, "IpFlux: A New Advanced Tool for Hydraulics Analysis in Open Channels," *Water*, vol. 17, no. 11: 1561, 2025.

- Gaussian hypergeometric functions. Hydrology and Earth System Sciences 17, 973–987. 2013.
- [20] Vatankhah, A.R., Easa, S.M. Accurate gradually varied flow model for water surface profile in circular channels. Ain Shams Engineering Journal 4(1), 45–53. 2013